ラマヌジャンのτ-関数の類似 (代数的整数論)

片山, 孝次

数理解析研究所講究録
230巻 1975年 107-117

ラマヌジャンのτ-関数の類似

津田塾大学　片山孝次

周知のように，デデキントのη-関数$\eta(z)$は次のように定義される：

$$\eta(z) = e^{\frac{\pi i z}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi i z},$$

$$z \in H \ (= 上半平面).$$

この24乗はふつう$\Delta(z)$と書かれ，それは全モデュラー群Γに関して-12次元のcusp formである．$\Delta(z)$のq-展開

$$\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$$

の係数である$\tau(n)$はラマヌジャンの関数とよばれている．この関数$\tau(n)$に指標χを何等かの手段によりつけて，"χ-付き$\tau(n)$"とでもいったものを定義し，その性質を研究しようというのが小論の目的である．

まず，η, Δ, τについて知られていることを列挙しよう．

1. $\eta(z)$ の $\sigma \in \Gamma$ に関する変換公式は知られている。そして、$\eta(z)$ はテータ関数の1つである。また $\eta(z)$ は、Kronecker の limit formula にあらわれる。

2. $\tau(n)$ は乗法的である。

3. $\tau(n) = O\left(n^{\frac{11}{2}+\varepsilon}\right)$, $\forall \varepsilon > 0$.

4. p を素数とすれば

$$|\tau(p)| < 2p^{\frac{11}{2}}.$$

表 3. により Dirichlet 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}$ が定義される。それはまた Euler 積展開をもつ。
(その Euler 積の因子 (p についての) を p^{-s} に関しての2次式とみたとき、その2次式はすべての p に対して虚根をもつ; これが有名なラマヌジャン予想であったが、最近 Deligne により証明された。4. と同値である。)

5. (Lehmer の問題) $\tau(n)$ は決して 0 にならない。
(この問題は未解決である。)

6. $\tau(n)$ に関して、種々の合同式が知られている。たとえば $n \equiv 1 \pmod 8$ ならば

$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \mod 2^{11}.$$

ここで $\sigma_r(n) = \sum_{0<d|n} d^r$ である。

1. に関して Dedekind は問題を, $\log\eta(z)$ の変換公式を求めることに転換した:

$$\log\eta(z) = \frac{\pi i z}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\log(1-q^n)$$
$$= \frac{\pi i z}{12} - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(e^{-2\pi i m z}-1)}.$$

よって, 結局 ランベルト級数 $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(e^{-2\pi i m z}-1)}$ の $\sigma\in\Gamma$ に関する変換公式を求めることになる.

(ついでに, そのランベルト級数の変換公式にあらわれる, σに関する定数項を Dedekind の和とよんでいる: われわれの立場から, 自然に"指標付きの Dedekind の和"が考察の対象として出てくる.)

さて, われわれは このランベルト級数に指標をつけてみようというのである. 以下簡単のために, kを正の整数とし, χを mod k の

real, primitive even character

とする. ($\chi(-1)=1$ であるχを even という.) したがって, よく知られているように, χ はクロネッカーの記号で与えられる指標である. よりくわしくいえば, $(\ )$ をクロネッカーの記号とするとき,

$k\equiv 1 \pmod 4$ で k は square-free であるか、
または $\frac{k}{4}\equiv 2, 3 \pmod 4$ で $\frac{k}{4}$ は square-free
であるとき、上のような $\chi = \chi_k$ は

$$\chi_k(n) = \left(\frac{k}{n}\right)$$

として与えられる。($k>0$).

ランベルト級数に χ をつける方法は3通り少くとも考えられる。まず $z\in H$ に対し

$$F_1(\chi; z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m(e^{-2\pi i m z}-1)}$$

と定義する。一方次の Kronecker の公式が知られている:

$$\frac{e^{2\pi i u z}}{e^{2\pi i z}-1} = \frac{1}{2\pi i z} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{e^{2\pi i n u}}{z-n} + \frac{e^{-2\pi i n u}}{z+n}\right\},$$

$$0<u<1,$$

$$\frac{1}{e^{2\pi i z}-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i z} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right\}.$$

(これらの公式は任意の $z\in\mathbb{C}$, $z\notin\mathbb{Z}$ に対して成り立つ。) これをランベルト級数の定義式に代入して、和変数 n に対して指標をつけたい。そこで

$$T_\chi = \sum_{h \bmod k} \chi(h)\, e^{\frac{2\pi i h}{k}}$$

とおくとき，任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して

$$T_\chi\cdot\chi(n)=\sum_{h \bmod k}\chi(h)\,e^{\frac{2\pi i n h}{k}}$$

であることに注意して，$z\in H$ に対し

$$F_2(\chi;z)=\sum_{h=0}^{k-1}\chi(h)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-2\pi i m\frac{h}{k}z}}{m(e^{-2\pi i m z}-1)}$$

と定義する，そのとき，

$$F_2(\chi;z)=\sum_{h=0}^{k-1}\chi(h)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left[\frac{1}{-2\pi i m z}+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{e^{2\pi i n\frac{h}{k}}}{-mz-n}+\frac{e^{-2\pi i n\frac{h}{k}}}{-mz+n}\right\}\right]$$

$$=\frac{T_\chi}{-2\pi i z}\zeta(2)-\frac{T_\chi}{2\pi i}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\chi(n)}{mz+n}+\frac{\chi(-n)}{mz-n}\right)$$

である，さらに m, n に同時に χ をつけて

$$F_3(\chi;z)=\sum_{h=1}^{k-1}\chi(h)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(m)}{m}\frac{e^{-2\pi i m\frac{h}{k}z}}{e^{-2\pi i m z}-1}$$

と定義する．

$s\in\mathbb{Z}$，$s\geq 1$ に対して

$$P_s(u) = -s!\,{\sum_{n}}' \frac{e^{2\pi i n u}}{(2\pi i n)^s}, \quad 0 \leqq u < 1,$$

とおく。ただし、$s=1$ に対しては右辺の和は、符号のことなる n についてまず和をとるものとする。$B_s(u)$ をベルヌーイ多項式とすれば、$(u, s) \neq (0,1)$ に対して

$$B_s(u) = P_s(u)$$

である。上に述べた mod k の指標 χ に対して

$$B_{\chi,s}(u) = k^{s-1}\sum_{h=0}^{k-1} \chi(h) P_s\left(\frac{h+u}{k}\right)$$

とおく。$B_{\chi,s}(u)$ は Leopoldt の意味での、generalized Bernoulli 多項式である。

上に定義した $F_j(\chi;z)$, $j=1,2,3$, に対して次の反転公式、変換公式を証明することができる。

定理 1 (χ: non-principal)

(i) $$F_1(\chi;z) - T_\chi^{-1} F_2(\chi;-z^{-1}) = -\frac{1}{2}L(1,\chi) + \frac{T_\chi \pi i}{2k^2 z} B_{\chi,2}(0)$$

(ii) $$F_3(\chi;z) - F_3(\chi;-z^{-1}) = \frac{2T_\chi \pi i}{k}\left(B_{\chi,1}(0)\right)^2$$

定理 2

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(k) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod k \right\} \subset \Gamma$$

とする．また $c \neq 0$ において，

$$S_1(\chi, \sigma) = \sum_{p=0}^{k-1} \chi(p) \sum_{h=0}^{c-1} P_1\left(\frac{h}{c}\right) P_1\left(1 - \left\{\frac{p}{k} - \frac{ha}{c}\right\}\right),$$

$$S_2(\chi, \sigma) = \sum_{p=0}^{k-1} \chi(p) \sum_{h=0}^{c-1} P_1\left(\frac{p}{kc} + \frac{h}{c}\right) P_1\left(1 - \left\{-\frac{ha}{c} - \frac{pa}{kc}\right\}\right),$$

$$S_3(\chi, \sigma) = \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{q=0}^{k-1} \chi(p)\chi(q) \sum_{h=0}^{c-1} P_1\left(\frac{p}{kc} + \frac{h}{c}\right) P_1\left(1 - \left\{\frac{q}{k} - \frac{ah}{c} - \frac{pa}{kc}\right\}\right)$$

とおく．ここで $\{x\} = x - [x] = x$ の小数部分 である．

(i) $F_1(\chi : \sigma(z)) = F_1(\chi : z) + \pi i T_\chi^{-1} S_1(\chi, \sigma)$

(ii) $$F_2(\chi : \sigma(z)) - \frac{\pi i}{2} \sigma(z) \frac{B_{\chi,2}(0)}{k} = F_2(\chi : \sigma(z)) - \frac{\pi i}{2} z \frac{B_{\chi,2}(0)}{k} - \frac{\pi i}{2} \frac{a+d}{c} \frac{B_{\chi,2}(0)}{k} + \pi i S_2(\chi, \sigma),$$

(iii) $F_3(\chi : \sigma(z)) = F_3(\chi : \cancel{\sigma(z)}\, z) + \pi i S_3(\chi, \sigma)$.

上の定理にあらわれた $S_j(\chi : \sigma)$, $j = 1, 2, 3$, が"χ-付きデデキントの和"というべきものである．

定理2をみればη-関数の類似として次のように"χ付きη-関数"を定義すればよいことがわかる.

$$\eta_1(\chi;z)=\prod_{h=0}^{k-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\varepsilon_k^{h}q^{n}\right)^{\chi(h)},\quad \varepsilon_k=e^{\frac{2\pi i}{k}},$$

$$\eta_2(\chi;z)=e^{\frac{\pi i B_{\chi,2}(0)}{2k}z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q_k^{n}\right)^{\chi(n)},\quad q_k=e^{\frac{2\pi i z}{k}},$$

$$\eta_3(\chi;z)=\prod_{h=0}^{k-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\varepsilon_k^{h}q_k^{n}\right)^{\chi(h)\chi(n)}.$$

このとき

$$F_1(\chi;z)=-T_\chi^{-1}\log\eta_1(\chi;z),$$

$$F_2(\chi;z)-\frac{\pi i z B_{\chi,2}(0)}{2k}=-\log\eta_2(\chi;z),$$

$$F_3(\chi;z)=-T_\chi^{-1}\log\eta_3(\chi;z),$$

である.

以下 η_2 に関して述べる. $\left(e^{\frac{\pi i B_{\chi,2}(0)}{2k}z}\right)^{k'}$ が q_k の整数乗となる最小の整数を k' とする. たとえば $k=5,13,8,12$ に対して $k'=5,1,2,1$ である. このような k'

を用いて

$$\Delta_2(\chi_k ; z) = \eta_2(\chi_k ; z)^{k'}$$

と定義する. これが Δ-関数の類似である. 以下簡単のために $q_k = \left(e^{\frac{\pi i B_{\chi,2}(0)}{2k} z}\right)^{k'}$ とする. Δ_2 の q_k-展開を

$$\Delta_2(\chi_k ; z) = q_k \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q_k{}^n)^{k'\chi(n)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \tau_2(\chi_k ; n)\, q_k{}^n$$

とすれば, $\tau_2(\chi_k ; n) \in \mathbb{Z}$ で, これは次の漸化式により計算される;

$$\tau_2(\chi_k ; n) = \frac{k'}{1-n}\Big\{\tau_2(\chi, n-1)\, a_\chi(1) + \tau_2(\chi ; n-2)\, a_\chi(2) + \cdots + \tau_2(\chi ; 1)\, a_\chi(n-1)\Big\},$$

$$a_\chi(n) = \sum_{j \mid n} j\chi(j).$$

この τ_2 がラマヌジャンの τ-関数の類似である.

η_2, Δ_2, τ_2 の性質について調べよう. (η, Δ, τ の

性質と平行して述べる）

(1) 変換公式についてはすでに定理1.2として与えた。
$\eta_2(\chi_k; z)$ はいくつかのテータ関数の積の商として表わされる（ヤコービの3重積公式を用いて証明される。）

(2) $\tau_2(\chi_k; n)$ は乗法的ではない。

(3) $\tau_2(\chi_k; n) = O(n^{k'\varphi(k)})$ が成り立つ。

(5). Lehmerの予想になし、

$$n \equiv 4 \pmod{6} \Rightarrow \tau_2(\chi_{12}; n) = 0$$

が成り立つようである。

(6) $n \equiv 8 \pmod{12}$ ならば

$$\tau_2(\chi_{12}; n) \equiv a_{\chi_{12}}(n) \mod 2^3$$

が成り立つようである。

(7) $\tau_2(\chi_k; n)$ の符号は mod kk' に関し一定である らしい。すなわち

$$n \equiv m \pmod{kk'} \Rightarrow \tau_2(\chi_k; n)\,\tau_2(\chi_k; m) \geq 0$$

となるらしい。

(5), (6), (7) については上述の τ_2 の漸化式を用いて、電子計算機により $n \leq 200$ まで τ_2 の値を求めた

結果からの推測である。(1), (2), (3) については [1] をみられたい。また (1) の結果を用いて $S_2(\chi, \sigma)$ の分母を exact に定めることが出来る。

[1] K. Katayama Zeta-functions, Lambert series and arithmetic functions analogous to Ramanujan's τ-function I, Crelle 1974. Bd. 268/269.
同 II. to appear in Crelle. J.